数理解析研究所講究録
936巻 1996年 16-26

2次元トーラス上のFurstenberg変換とそのC*接合積について

琉大理 小高一則 (Kazunori Kodaka)

1. 準備

Xをcompact空間, C(X)をX上の複素数値連続関数全体からつくられるC*環, ϕをX上の同相写像とし、ϕから定まるC(X)上の自己同型写像も同じϕを使って表わす。次のような集合を考える。

$G_0(\phi)=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\lambda$は$\phi$の固有値で$|\lambda|=1\}$

$G_1(\phi)=\{f\in C(X)\mid$ある$\lambda\in G_0(\phi)$に対して$f\circ\phi=\lambda f$かつ$|f|=1\}$

$\vdots$

$G_j(\phi)=\{g\in C(X)\mid$ある$f\in G_{j-1}(\phi)$に対して$g\circ\phi=fg$かつ$|g|=1\}$

定義 $\bigcup_{j=0}^{\infty}G_j(\phi)$から生成されるC*環がC(X)になるとき、$\phi$はtopologically quasi-discrete spectrumをもつという。topologically quasi-discrete spectrumをもつという性質は位相共役に関して不変である。

θを$(0,1)$に属す無理数とし、fを1次元トーラス$\mathbb{T}$上の実数値連続関数とする。2次元トーラス$\mathbb{T}^2$上の同相写像ϕ_fを

$$\phi_f(x,y)=(e^{2\pi i\theta}x,\ e^{2\pi i f(x)}xy)\ ,\ x,y\in\mathbb{T}$$

と定義する。ϕ_fをFurstenberg変換という。$f=0$のとき、つまり、

$$\phi_0(x,y)=(e^{2\pi i\theta}x,\ xy)\qquad x,y\in\mathbb{T}$$

をAnzai変換という。

Rouhani [5]によりϕ_0, ϕ_fはminimalでありϕ_0はtopologically quasi-discrete spectrumをもつことがわかる。

定義　$\mathbb{T}$上の実数値連続関数fに対して

$$f(x)=g(x)-g(e^{2\pi i\theta}x)+c\qquad a.e.$$

となる実数値可測関数gと、実数cとが存在するとき　fは$e^{2\pi i\theta}$に関してsplitするという。

定義　無理数$\theta\in(0,1)$がLiouville数であるとは、

$$|e^{2\pi i n\theta}-1|\geq\frac{C}{n^r}\qquad n\in\mathbb{N}$$

となるような$C>0$, $r>1$が存在しないことである。

Furstenberg変換ϕ_fから定まる接合積$C(\mathbb{T}^2)\times_{\phi_f}\mathbb{Z}$を

$A(\phi_f)$で表わす。Rouhaniは[5]の中で次のような結果を示している。

結果1. あるLiouville数θに対しては、Furstenberg変換ϕ_fがtopologically quasi-discrete spectrumをもたないが、uniquely ergodicであるような$\mathbb{T}$上の実数値連続関数fが存在する。

結果2. $\mathbb{T}$上の実数値連続関数fが$e^{2\pi i\theta}$に関してsplitするならば、Furstenberg変換ϕ_fはuniquely ergodicである。

結果1に対して、

問題1. ϕ_{f_1}、ϕ_{f_2}を同じ無理数θに関する2つのFurstenberg変換としたとき、$A(\phi_{f_1}) \cong A(\phi_{f_2})$でかつ$\phi_{f_1}$がtopologically quasi-discrete spectrumをもつならば、ϕ_{f_2}もtopologically quasi-discrete spectrumをもつか。

結果2に対しては、

問題2. $\mathbb{T}$上の実数値連続関数fが$e^{2\pi i\theta}$に関してsplitであるという条件を除いても、ϕ_fはなおuniquely ergodicになるか。

という2つの問題をRouhani [5] は述べている。以下、上の問題に対してわかったことを述べる。

2. Topologically quasi-discrete spectrum と位相共役

問題1については、次のようなことがわかる。

定理1. 次の3つの条件は同値。

(1) ϕ_f は ϕ_0 と位相共役である。

(2) ϕ_f は、topologically quasi-discrete spectrum をもつ。

(3) $\exists g$; $\mathbb{T}$ 上の実数値連続関数、

$$\text{s.t.}\quad g(x)-g(e^{2\pi i\theta}x)=f(x)-\int_{\mathbb{T}}f(z)dz \qquad x\in\mathbb{T}$$

(証明) (1)$\Rightarrow$(2) : ϕ_0 は topologically quasi-discrete spectrum をもち、ϕ_f は ϕ_0 と位相共役だから、ϕ_f も topologically quasi-discrete spectrum をもつ。

(2)$\Rightarrow$(3) : Rouhani [5, Theorem 2.1] あるいは $G_1(\phi_f)$ を定義に従って計算すると、

$$G_1(\phi_f)=\{au^k \mid k\in\mathbb{Z},\ a\in\mathbb{C},\ |a|=1\}$$

となる。ここで、u は $u(x,y)=x \quad x,y\in\mathbb{T}$ で定まる $\mathbb{T}^2$ 上の連続関数。$G_0(\phi_f)\cup G_1(\phi_f)$ では、$C(\mathbb{T}^2)$ を生成しないので、ϕ_f が topologically quasi-discrete spectrum をもつこ

とから、$G_2(\phi_f)$には $G_0(\phi_f)\cup G_1(\phi_f)$とは別の元が存在する。
従って、ある $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$に対して

$$\exists h\in C(\mathbb{T}^2)\ \text{s.t.}\ h\circ\phi_f = au^k h,\ |h|=1.$$

hは$C(\mathbb{T}^2)$のunitaryなので

$$h(x,y)=x^m y^n e^{2\pi i S(x,y)}$$

と書ける。ここで、m, nは整数で Sは、$\mathbb{T}^2$上の実数値連続関数。このとき、$h\circ\phi_f = au^k h$なので、$n=k$かつ

$$e^{2\pi i\{S(\phi_f(x,y))-S(x,y)+kf(x)\}}=ae^{-2\pi i m\theta}$$

従って、

$$S(\phi_f(x,y))-S(x,y)+kf(x)=b+p(x,y)$$

ここで、pは$\mathbb{T}^2$上の整数値関数であり、bは実数。上の式からpは連結集合$\mathbb{T}^2$上の連続関数であることがわかるから、定関数である。よって、

$$S(\phi_f(x,y))-S(x,y)+kf(x)=c\qquad x,y\in\mathbb{T}$$

ここで、cは実定数。ϕ_fがmeasure-preservingであることを上の式に用いると、

$$\int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx=\frac{c}{k}$$

更に、$x\in\mathbb{T}$に対して、

$$g(x)=\frac{1}{k}\int_{\mathbb{T}} S(x,y)\,dy$$

と定める。このとき gは、$\mathbb{T}$上の実数値連続関数になり、

$$g(e^{2\pi i\theta}x)-g(x)+f(x)$$

$$= \frac{1}{k}\int_{\mathbb{T}} S(e^{2\pi i\theta}x, y)\,dy - \frac{1}{k}\int_{\mathbb{T}} S(x,y)\,dy + \int_{\mathbb{T}} f(x)\,dy$$

$$= \frac{1}{k}\int_{\mathbb{T}} S(e^{2\pi i\theta}x,\ e^{2\pi i f(x)}xy)\,dy - \frac{1}{k}\int_{\mathbb{T}} S(x,y)\,dy + \int_{\mathbb{T}} f(x)\,dy$$

$$= \frac{1}{k}\int_{\mathbb{T}} S(\phi_f(x,y)) - S(x,y) + k f(x)\}\,dy$$

$$= \frac{c}{k} = \int_{\mathbb{T}} f(z)\,dz$$

ゆえに、

$$g(x) - g(e^{2\pi i\theta}x) = f(x) - \int_{\mathbb{T}} f(z)\,dz \qquad x \in \mathbb{T}。$$

(3) ⇒ (1)：$\mathbb{T}^2$上の同相写像ψを

$$\psi(x,y) = (e^{2\pi i\gamma}x,\ e^{2\pi i g(x)}y) \qquad x, y \in \mathbb{T}$$

と定める。ここで、$\gamma = \int_{\mathbb{T}} f(z)\,dz$。このとき、

$$\phi_0 \circ \psi = \psi \circ \phi_f$$

となる。よって、ϕ_0とϕ_fとは 位相共役。　　　　(証終)

3. Unique ergodicity

講演のとき、竹崎先生に"間違い"を指摘されました。

従って、予稿集の定理2

「$\mathbb{T}$上の任意の実数値連続関数fに対して$A(\phi_f)$は、unique tracial stateをもつ。」

は、成立するかどうかわかりません。C^*-接合積 $A(\phi_f)$が、

unique tracial state をもつということと、Φ_f が uniquely ergodic であることとは、今の場合、Tomiyama[6, Corollary 3.3.10]により同値です。問題2について、次のことは成り立つ。

命題2. f を $\mathbb{T}$ 上の実数値連続関数とする。f に対して、

$$\exists G \in L^\infty(\mathbb{T}), \quad \exists \lambda \in \mathbb{T}$$

$$\text{s.t. } e^{2\pi i f(x)} G(e^{2\pi i\theta} x) = \lambda G(x), \quad |G(x)| = 1 \quad x \in \mathbb{T}$$

であると仮定する。このとき、f より定まる Furstenberg 変換 Φ_f は、uniquely ergodic である。

証明は、Rouhani の結果2と同様なので省く。また、講演のときに述べた、"間違った補題"

「任意の実数値連続関数 f に対して

$$(*) \quad \exists G \in L^\infty(\mathbb{T}), \quad \exists \lambda \in \mathbb{T}$$

$$\text{s.t. } e^{2\pi i f(x)} G(e^{2\pi i\theta} x) = \lambda G(x), \quad |G(x)| = 1 \quad x \in \mathbb{T}」$$

は成り立ちません。このことは、Baggett[1, Theorem 2]とそれに続く Remark よりわかります。以下にその Remark を書くと、

Remark.（Baggett[1]）任意の無理数 θ に対して、$\mathbb{T}$ 上の実数値連続関数 f が、上の条件(*)を満たす。

$\Longleftrightarrow$ fが、$f(x)=\sum_{n=-N}^{N} a_n x^n$　$a_n \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{T}$
という多項式の形で書くことができる。

Furstenberg変換のunique ergodicityについては、いろいろな人により研究がなされている。Hellekalek and Larcher[3]により次のことは、わかる。

定理（Hellekalek and Larcher [3, Corollary]）$\mathbb{T}$上の実数値関数fが、連続的微分可能で$\int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx = -\frac{1}{2}$ならば、$f$より定まるFurstenberg変換$\Phi_f$は、uniquely ergodicである。

この定理より、ある無理数θに対しては$e^{2\pi i\theta} \in \mathbb{T}$に関してsplitできないが、Furstenberg変換Φ_fがuniquely ergodicになるような$\mathbb{T}$上の実数値連続的微分可能関数fが存在することがわかる。

4. Topologically quasi-discrete spectrumをもたないFurstenberg変換

ここでは、任意の無理数θに対して、topologically quasi-discrete spectrumをもたないが、uniquely ergodicであるようなFurstenberg変換Φ_fをつくる。

θが無理数なので、次の条件

$$|e^{2\pi i n_j \theta}-1|<\frac{1}{j} \qquad j=1,2,\cdots$$

を満たす自然数の狭義の単調増加列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ をつくることができる。数列 $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ を、

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{j}(1-e^{2\pi i n_j\theta}) & n=n_j\\ \frac{1}{j}(1-e^{-2\pi i n_j\theta}) & n=-n_j\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

と定義する。任意の $x\in\mathbb{T}$ に対して、$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n x^n$ とおくと、 $n=\pm n_j$ に対して

$$|a_n|=\frac{1}{j}|1-e^{2\pi i n_j\theta}|<\frac{1}{j^2}$$

だから、$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n x^n$ は一様収束する。従って、f は $\mathbb{T}$ 上の実数値連続関数であり $a_0=0$ より $\int_{\mathbb{T}}f(x)dx=0$ である。

補題3. $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, f を上で定めたものとする。方程式

$$g(x)-g(e^{2\pi i\theta}x)=f(x) \qquad x\in\mathbb{T}$$

を考える。このとき、上の方程式は 実数値 $L^2(\mathbb{T})$-解をもつが、実数値 $C(\mathbb{T})$-解はもたない。

(証明) 数列 $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ を

$$b_n=\begin{cases}\frac{1}{j} & n=\pm n_j\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

とおく。任意の$x \in \mathbb{T}$に対して $g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n x^n$ とおくと、$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n x^n$ は L^2-norm で収束するから $g \in L^2(\mathbb{T})$ であり実数値関数であることがわかる。更に直接計算することより、

$$g(x)-g(e^{2\pi i\theta}x)=f(x) \quad (\text{a.e. } x \in \mathbb{T})$$

であることもわかる。次に、上の方程式が $C(\mathbb{T})$-解 g をもつと仮定する。このとき g の Fourier 級数は、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{1-e^{2\pi i n\theta}} x^n + c$$

に等しい。ここで、c は定数。g は連続なので $x=1$ で Cesàro summable である。ところが、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{1-e^{2\pi i n\theta}} = 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

となり、$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ は Cesàro summable でないから矛盾。ゆえに $C(\mathbb{T})$-解は、存在しない。 (証終)

定理4. 上で定めたfより定まるFurstenberg変換ϕ_fは、topologically quasi-discrete spectrumをもたないが、uniquely ergodicである。

(証明) ϕ_f が uniquely ergodic であることは、命題2というよりもRouhaniの結果2と補題3より明らか。また、$\int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx=0$ だから、定理1と補題3より ϕ_f が topologically quasi-discrete spectrum をもたないことがわかる。 (証終)

参考文献

[1] L. Baggett, On functions that are trivial cocycles for a set of irrationals, Proc. Amer. Math. Soc., 104 (1988), 1212-1215.

[2] H. Furstenberg, Strict ergodicity and transformation of the torus, Amer. J. Math., 83 (1961), 573-601.

[3] P. Hellekalek and G. Larcher, On the ergodicity of a class of skew products, Israel J. Math., 54 (1986), 301-306.

[4] K. Kodaka, Anzai and Furstenberg transformations on the 2-torus and topologically quasi-discrete spectrum, Canad. Math. Bull., 38 (1955), 87-92.

[5] H. Rouhani, A Furstenberg transformation of the 2-torus without quasi-discrete spectrum, Canad. Math. Bull., 33 (1990), 316-322.

[6] J. Tomiyama, Invitation to C^*-algebras and topological dynamics, World Sci., Singapore, 1987.